ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ LUYẾN

ĐỊNH LÝ POMPEIU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THỊ LUYẾN

ĐỊNH LÝ POMPEIU

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Nguyễn Tất Thắng

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

MỞ ĐẦU

Hình học phẳng là một nội dung cơ bản của Toán học và Toán sơ cấp nói riêng. Các bài toán về tam giác và về các bất đẳng thức hình học trong tam giác là các vấn đề phổ biến. Để giải quyết các bài toán đó, một số phương pháp được sử dụng như: phương pháp biến hình (phép quay, tịnh tiến, nghịch đảo,..), vẽ thêm hình và điểm mới,.. Bên cạnh đó việc sử dụng số phức cũng là một phương pháp rất hiệu quả, nhất là trong các bài toán bất đẳng thức hình học.

Luận văn trình bày một số bài toán về tam giác và bất đẳng thức hình học. Cụ thể, nội dung chính của luận văn xoay quanh định lý cổ điển Pompeiu, nói rằng ba độ dài đoạn thẳng nối từ một điểm bất kì trong mặt phẳng đến ba cạnh của một tam giác đều lập thành ba cạnh của một tam giác. Các tính chất liên quan đến tam giác đó cũng được nghiên cứu; đồng thời phiên bản tổng quát của Định lý Pompeiu, định lí đảo của Định lí Pompeiu và một số ứng dụng của Định lí Pompeiu cũng được trình bày trong luận văn này. Nội dung chính của luận văn gồm 3 Chương:
Chương 1: Trình bày Định lý Pompeiu và định lý đảo của nó.
Chương 2: Trình bày tổng quát hóa của Định lý Pompeiu.
Chương 3: Trình bày ứng dụng của Định lý Pompeiu. Một số vấn đề liên quan đến bài toán tam giác cũng được nhắc đến.

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Nguyễn Tất Thắng. Qua đây, em xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình. TS. Nguyễn Tất Thắng, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của em. Đồng thời em cũng chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong khoa Toán – Tin học trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, các thầy cô đã trang bị kiến thức cho em trong thời gian học tập tại trường, tạo mọi điều kiện cho em về tài liệu và thủ tục hành chính để em hoàn thành luận văn này.

Chương 1

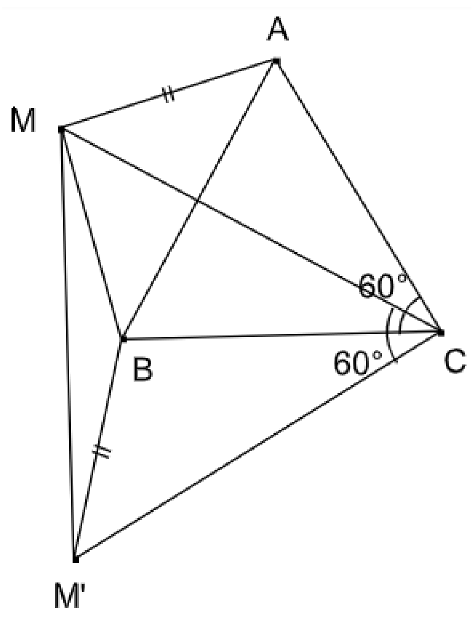
Định lý Pompeiu

Ba đoạn thẳng lập thành ba cạnh của một tam giác nếu tổng độ dài hai cạnh lớn hơn độ dài cạnh thứ ba. Trong Chương này chỉ ra một cách dựng ba cạnh của một tam giác.

1.1 Định lý Pompeiu

Định lý 1.1. *(Định lý Pompeiu, xem [5]). Cho tam giác đều ABC và M là một điểm trên mặt phẳng chứa tam giác đó. Khi đó MA, MB và MC lập thành độ dài ba cạnh của một tam giác. Tam giác đó suy biến khi và chỉ khi điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác.*

Trong mục này ta sẽ chứng minh nửa đầu của định lý trên, phần còn lại sẽ chứng minh trong mục sau.



Thực hiện phép quay tâm C, góc $\frac{\pi}{3}$ biến A thành B. Gọi M' là ảnh của M qua phép quay ấy. Từ đó $MA = M'B$ và $MM' = MC$.
Vậy $\Delta M'MB$ có ba cạnh với độ dài là MB, MC, MA.

Định nghĩa 1.1. Với các kí hiệu như trong Định lý 1.1, ta gọi tam giác với độ dài ba cạnh MA, MB, MC là tam giác Pompeiu.

Nhận xét 1.1. Theo cách chứng minh của Định lý 1.1, khi M thuộc miền trong của ΔABC thì tam giác Pompeiu có thể xây dựng một cách tường minh.

Định lý 1.2. *(Định lý Tabrica, xem [7]). Cho tam giác đều ABC và M là một điểm nằm miền trong của tam giác. Khi đó các góc và diện tích của tam giác Pompeiu được tính như sau*
(a) Ba góc của tam giác là $\widehat{BMC} - 60°$, $\widehat{CMA} - 60°$, $\widehat{AMB} - 60°$,
(b) Diện tích bằng $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC} - \frac{\sqrt{3}}{4}|MO|^2$, trong đó O là tâm của tam giác ABC.

Bổ đề 1.1. *Cho ΔABC, với G là trọng tâm của tam giác. Cho M bất kì, ta có:*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 \\
&= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} \\
&+ \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}^2 \\
&= 3\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) \\
&+ \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \\
&= 3\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{0} + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \\
&= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2.
\end{aligned}$$

Suy ra

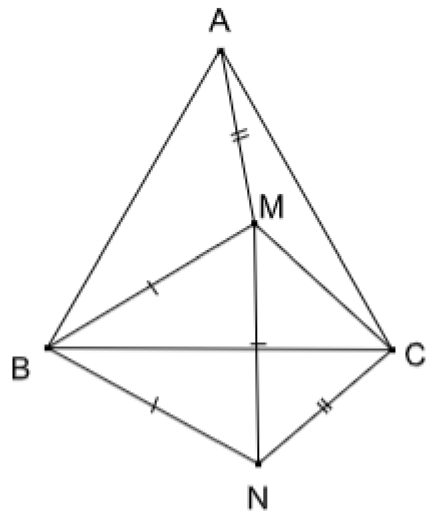
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \tag{1.1}$$

Mà

$$GA^2 = \left(\frac{2}{3}\mathrm{AA}'\right)^2 = \frac{4}{9}AA'^2 = \frac{4}{9}\left[\frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}\right].$$

Trong đó AA' là trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC
Vậy
$$GA^2 = \frac{2}{9}AB^2 + \frac{2}{9}AC^2 - \frac{1}{9}BC^2.$$
Tương tự
$$GB^2 = \frac{2}{9}AB^2 + \frac{2}{9}BC^2 - \frac{1}{9}AC^2,$$
$$GC^2 = \frac{2}{9}AC^2 + \frac{2}{9}BC^2 - \frac{1}{9}AB^2.$$
Suy ra
$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right). \tag{1.2}$$
Thay (1.2) vào (1.1) ta có
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right).$$
□

Chứng minh Định lý Tabrica.



(a) Gọi N là điểm trên mặt phẳng ΔABC sao cho ΔBNM là tam giác đều và tia BC nằm giữa hai tia BM và BN. Xét hai tam giác AMB và BNC, ta có
$$AB = BC, BM = BN \text{ và } \widehat{MBA} = 60^\circ - \widehat{MBC} = \widehat{CBN}.$$
Vậy $\Delta AMB = \Delta BNC(c.g.c)$.
Do vậy $AM = CN$, tức là ΔNMC là một tam giác Pompeiu.
Ta có
$$\widehat{CMN} = \widehat{CMB} - \widehat{NMB} = \widehat{CMB} - 60^\circ,$$
$$\widehat{CNM} = \widehat{CNB} - \widehat{MNB} = \widehat{CNB} - 60^\circ = \widehat{AMB} - 60^\circ.$$

và

$$\begin{aligned}\widehat{MCN} &= 180^\circ - (\widehat{CMN} + \widehat{CNM})\\ &= 180^\circ - (\widehat{CMB} - 60^\circ + \widehat{AMB} - 60^\circ)\\ &= \widehat{AMC} - 60^\circ.\end{aligned}$$

(b) Từ phần (a), suy ra

$$\begin{aligned}S_{\Delta CMN} &= \frac{1}{2}CM.MN.\sin\widehat{CMN}\\ &= \frac{1}{2}CM.BM.\sin\left(\widehat{CMB} - 60^\circ\right)\\ &= \frac{1}{2}CM.BM.\left(\sin\widehat{CMB}.\frac{1}{2} - \cos\widehat{CMB}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}CM.BM.\sin\widehat{CMB} - \frac{\sqrt{3}}{4}.CM.BM.\cos\widehat{CMB}\\ &= \frac{1}{2}S_{\Delta CMB} - \frac{\sqrt{3}}{8}\left(CM^2 + BM^2 - a^2\right),\end{aligned}$$

với $a = BC = CA = AB$.
Tương tự ta cũng chứng minh được

$$S_{\Delta CMN} = \frac{1}{2}S_{\Delta CMA} - \frac{\sqrt{3}}{8}\left(CM^2 + MA^2 - a^2\right).$$

và

$$S_{\Delta CMN} = \frac{1}{2}S_{\Delta BMA} - \frac{\sqrt{3}}{8}\left(BM^2 + MA^2 - a^2\right).$$

Cộng ba đẳng thức trên, ta được

$$3S_{\Delta CMN} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} - \frac{\sqrt{3}}{8}\left(2MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 - 3a^2\right).$$

Mặt khác, ta có công thức Leibniz cho ΔABC với trọng tâm G và điểm M

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right).$$

Khi ΔABC đều và $G \equiv O$ (tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác) và $a^2 = AB^2 = BC^2 = AC^2$, thì

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + a^2.$$

Do đó, ta được

$$\begin{aligned}3S_{\Delta CMN} &= \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} - \frac{\sqrt{3}}{8}\left(6MO^2 + 2a^2 - 3a^2\right)\\ &= \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} - \frac{\sqrt{3}.6}{8}MO^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2.\end{aligned}$$

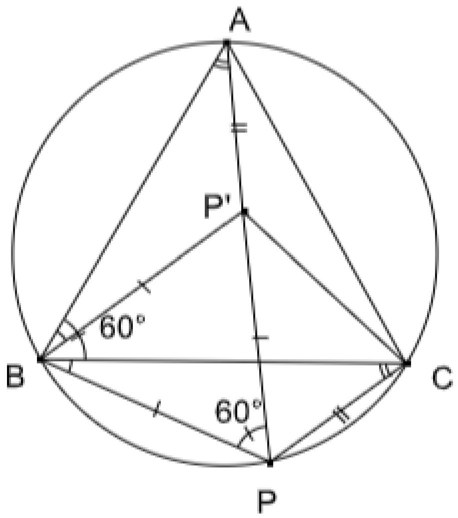
Hơn nữa $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$, nên

$$\begin{aligned}3S_{\Delta CMN} &= \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} - \frac{3\sqrt{3}}{4}MO^2 + \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}.\\ &= S_{\Delta ABC} - \frac{3\sqrt{3}}{4}MO^2.\end{aligned}$$

□

Định lý 1.3. *(Định lý Van Schooten, xem [8]). Cho điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Khi đó đoạn dài nhất trong ba đoạn thẳng PA, PB, PC có độ dài bằng tổng độ dài hai cạnh còn lại.*

Chứng minh.



Giả sử điểm P nằm trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Thực hiện phép quay tâm B góc $60°$ biến điểm C thành điểm A, vì $\widehat{APB} = 60°$ nên phép quay trên biến điểm P thành P' thuộc tia PA.
Ta có tam giác $PP'B$ đều, vì vậy P' nằm trên đoạn PA.
Xét hai tam giác $AP'B$ và CPB, ta có

$$AB = BC, \widehat{P'AB} = \widehat{BCP}.$$

Ngoài ra

$$\widehat{ABP'} = \widehat{CBP} \text{ (vì cùng bằng } 60^\circ - \widehat{P'BC}).$$

Do vậy

$$\Delta AP'B = \Delta CPB.$$

Suy ra

$$AP' = CP.$$

Vậy

$$PA = PP' + P'A = PB + PC.$$

□

1.2 Bất đẳng thức Ptolemy và Định lý Pompeiu

Bất đẳng thức Ptolemy liên hệ độ dài đường chéo với độ dài cạnh của một tứ giác. Từ bất đẳng thức Ptolemy cũng suy ra Định lý Pompeiu và do đó cũng cho một chứng minh khác của định lý này.

Định lý 1.4. *(Định lý Ptolemy, xem [4]). Nếu A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ giác lồi nội tiếp đường tròn thì*

$$AC.BD = AB.CD + BC.AD.$$

Nhận xét 1.2. Định lý này cũng có thể phát biểu thành định lý thuận và đảo
- Thuận: Nếu một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn thì tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện.
- Đảo: Nếu một tứ giác thỏa mãn điều kiện tổng các tích của các cặp cạnh đối diện bằng tích của hai đường chéo thì tứ giác đó nội tiếp một đường tròn.

Chứng minh Định lý Ptolemy.